Тема лекции 9:Знакопеременные числовые ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

Цель лекции:
Сформировать у студентов понимание свойств знакопеременных рядов, условий их сходимости по признаку Лейбница, а также различий между абсолютной и условной сходимостью.

Основные вопросы:
1. Понятие знакопеременного ряда.
2. Признак Лейбница и его применение.
3. Необходимые условия сходимости знакопеременных рядов.
4. Абсолютная и условная сходимость: определения и примеры.
5. Сравнение степеней сходимости: связь между абсолютной и условной сходимостью.

Рассмотрим теперь числовые ряды, имеющие члены любого знака.
Определение. Знакочередующимся рядом называется числовой ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \qquad (1)$$

где $a_k > 0$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Для исследования сходимости таких рядов используется следующий признак.
Теорема. (Признак Лейбница). Пусть знакочередующийся ряд (1) удовлетворяет двум условиям:
1. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$,
2. члены ряда по модулю убывают, т.е. $a_{k+1} < a_k$, для $k \in N$.

Тогда этот ряд сходится и его сумма S удовлетворяет неравенству $0 < |S| \le a_1$.

Рассмотрим случай, когда ряд начинается с $+a_1$; запишем частичную сумму для четного числа слагаемых $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$.

Из условия в) теоремы следует, что $S_{2n} > 0$ и эта последовательность возрастает с ростом n (все скобки положительны). Запишем S_{2n} другим способом.

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Поскольку в скобках стоят положительные величины, то $S_{2n} < a_1$. Возрастающая последовательность S_{2n} ограничена сверху числом a_1, следовательно, согласно свойству пределов существует предел $\lim\limits_{2n\to\infty} S_{2n} = S$ и $0 < S \le a_1$.

Для нечетного числа слагаемых, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + a_{2n+1}\right) = S + 0 = S,$$

Случай, когда первый член ряда отрицателен, рассматривается аналогично.

Пример. Исследуем сходимость знакочередующегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ и $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$, для всех $k \in N$, то этот ряд сходится, и его сумма S удовлетворяет неравенству $0 < S \le 1$.
На самом деле, можно проверить, что $S = \ln 2$.

Введем еще одно важное понятие для сходящегося ряда.
Определение. n-ым остатком сходящего ряда (1) называется разность между его суммой S и частичной суммой S_n:

$$R_n = S - S_n. \qquad (2)$$

Этот остаток есть сумма членов ряда, начиная с $(n+1)-$го $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Из (2) следует, что остаток можно определить только для сходящегося ряда, и что $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, т.к. $\lim_{n\to\infty} S_n = S.$

Следствие. Остаток знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, по модулю не превосходит модуля своего первого члена, т.е. $|R_n| < a_{n+1}$.

Пример. Вычислить с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon = 0{,}01$ сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1^{k+1})}{k!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \ldots$$

Очевидно, что ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница.

Поскольку у этого ряда $a_5 = \frac{1}{120} < 0.01$, то $|R_4| < 0.01$. Отбросив этот остаток из суммы ряда, получим, что с требуемой точностью

$$S \approx S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{5}{8}.$$

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Пусть имеется произвольный числовой ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (3)

и ряд, составленный из абсолютных величин его членов, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. (4)

Определение. Ряд (3) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд (4). Если ряд (4) сходится, а (3) расходится, то ряд (3) называется условно сходящимся.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$ сходится абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин членов этого ряда (это ряд Дирихле с $p = 2$).

Пример. Выше было проверено, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (5)

сходится согласно принципу Лейбница. Ряд из абсолютных величин его членов есть расходящийся гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Поэтому ряд (5) сходится условно.

Теорема. При любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда эта сходимость не нарушается и сумма ряда не изменяется.

Казалось, что свойство «от перемены мест слагаемых сумма не меняется» должно выполняться всегда. Однако, для бесконечных сумм это не всегда так.

Контрольные вопросы:

1. Что называется знакопеременным рядом?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Какие условия необходимы для применения признака Лейбница?

4. В чём разница между абсолютной и условной сходимостью?
5. Можно ли сделать вывод о сходимости знакопеременного ряда, если он не сходится абсолютно?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.

7. Шипачев В.С. Высшая математика

8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.

9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.